„Blick ins Buch“
Bolyai Teamwettbewerb 2015

Die Prozentsätze geben an, welcher Anteil der Teilnehmer die einzelnen Lösungen angekreuzt hat. Die richtigen Antworten sind fett gedruckt und durch eine Schraffierung hervorgehoben.

Klasse 9

6. Zwischen den Städten **A** und **B** gibt es eine ständige Busverbindung. Aus beiden Städten fährt stündlich und gleichzeitig je ein Bus ab. Die Dauer der Fahrt beträgt 7 Stunden. In Stadt **A** ist es 12.00 Uhr und gerade fährt ein Bus ab.
Die Frage: Wie vielen entgegenkommenden Bussen begegnet dieser Bus, bis er in **B** ankommt?
Lösungshinweise: Zwischen den zwei Städten gibt es nur diese eine Busverbindung. Die Städte **A** und **B** zählen nicht als Treffpunkte.

(A) *6* **(B)** *7* **(C)** *11* **(D)** *13* **(E)** *15*

Lösung: Jenen Bus, der um 12.00 Uhr von **A** abfährt, werden wir im Weiteren „unseren Bus“ nennen.
Im *1. Schritt* untersuchen wir, wann der Bus von **B** losfuhr, der bei **A** um 12.00 Uhr ankommt. Da eine Fahrt 7 Stunden dauert, muss dieser Bus von **B** um 5.00 Uhr losgefahren sein. Weil die Städte **A** und **B** nicht als Treffpunkte gelten (siehe Lösungshinweis), begegnet unser Bus diesem ankommenden Bus nicht.
Im *2. Schritt* untersuchen wir die erste Begegnung unseres Busses. Diese erfolgt mit dem Bus, der um 6.00 Uhr aus **B** losfuhr. Die erste Begegnung findet um 12.30 Uhr statt.
Im *3. Schritt* untersuchen wir die letzte Begegnung unseres Busses. Dies erfolgt mit dem Bus, der um 18.00 Uhr aus **B** losfuhr. Begründung: Da eine Fahrt 7 Stunden dauert, kommt unser Bus um 19.00 Uhr in **B** an. Weil die Städte **A** und **B** nicht als Treffpunkte gelten (siehe Lösungshinweis), begegnet unser Bus dem aus **B** um 19.00 Uhr abfahrenden Bus nicht.
Im *4. Schritt* zählen wir alle Busse auf, denen unser Bus begegnet ist. Es reicht, wenn wir die jeweiligen Abfahrtzeiten aus **B** angeben. Diese sind: 6.00 Uhr, 7.00 Uhr, 8.00 Uhr, 9.00 Uhr, 10.00 Uhr, 11.00 Uhr, 12.00 Uhr, 13.00 Uhr, 14.00 Uhr, 15.00 Uhr, 16.00 Uhr, 17.00 Uhr und 18.00 Uhr. Das Zusammenzählen ergibt insgesamt 13 Busse.

(A) 51% **(B)** 21% **(C)** 3% **(D) 23%** **(E)** 2%

13. Von 7 Kugeln haben 2 eine elektromagnetische Strahlung. Mit Hilfe eines Messgerätes können wir überprüfen, ob in einer von uns ausgesuchten Gruppe von Kugeln Strahlung vorhanden ist oder nicht. Wenn es Strahlung anzeigt,

wissen wir jedoch *nicht*, ob eine oder zwei strahlende Kugeln dabei sind.
Die Frage: Durch wie viele Messungen können wir die 2 strahlenden Kugeln eindeutig identifizieren?

(A) *3* **(B)** *4* **(C)** *5* **(D)** *6* **(E)** *Keine von diesen.*

Lösung: Wir bezeichnen die 7 Kugeln mit A, B, C, D, E, F und G.
In **Teil 1** zeigen wir, dass die Aufgabe mit 6 Messungen lösbar ist. Dazu reicht es, wenn wir die Kugeln A, B, C, D, E, F nach und nach abmessen. Entweder haben wir so beide Kugeln direkt gefunden (z. B. C und F) oder nur eine (z. B. D). In diesem Fall muss die andere strahlende Kugel G sein.
In **Teil 2** zeigen wir, dass 5 Messungen reichen. In den *ersten drei* Messungen werden, nach und nach, die Zweiergruppen AB, CD und EF einzeln gemessen. Jetzt müssen wir zwei Möglichkeiten getrennt untersuchen.
<u>1. Fall</u>: Nur in einer der drei Gruppen wurde Strahlung festgestellt, z. B bei AB. In der *vierten* Messung wird die Kugel A, in der *fünften* Messung die Kugel B gemessen. (Eine einzelne Kugel kann als ein Sonderfall von Gruppe aufgefasst werden, und zwar als Gruppe mit einem Element.) Wenn beide Kugeln strahlen, so sind die gesuchten Kugeln A und B. Wenn nur eine Kugel strahlt, z. B. A, so sind die gesuchten Kugeln A und G.
<u>2. Fall</u>: In genau zwei Gruppen wurde Strahlung festgestellt, z. B bei AB und CD. Dies bedeutet: In beiden Zweiergruppen gibt es genau eine strahlende Kugel. In der *vierten* Messung wird A gemessen. Wenn sie strahlt, haben wir in der Gruppe AB die strahlende Kugel gefunden. Wenn A nicht strahlt, dann muss B eine strahlende Kugel sein. In der *fünften* Messung wird C gemessen. Wenn sie strahlt, haben wir in der Gruppe CD die strahlende Kugel gefunden. Wenn C nicht strahlt, dann muss D eine strahlende Kugel sein.
In **Teil 3** zeigen wir, dass 4 Messungen nicht immer ausreichen. Tatsächlich:
Wenn wir die Kugeln einzeln abmessen, bräuchten wir 6 Messungen (Teil 1).
Wenn wir Zweiergruppen abmessen, bräuchten wir 5 Messungen (Teil 2).
Wenn zuerst eine Dreiergruppe – z. B. ABC – gemessen wird, die strahlt *und* genau eine strahlende Kugel enthält, braucht man im ungünstigsten Fall 2 weitere Messungen um diese zu finden. Damit hat man schon dreimal gemessen. Es bleibt also nur noch eine Messung übrig, um die zweite strahlende Kugel aus D, E, F, G zu finden. Dies ist jedoch <u>nicht</u> möglich, 4 Messungen reichen somit auch in diesem Fall nicht aus.
Wenn zuerst eine Vierergruppe – z. B. ABCD – gemessen wird, die strahlt *und* genau eine strahlende Kugel enthält, braucht man im ungünstigsten Fall 3 weitere Messungen um diese zu finden. (Man weiß ja <u>nicht</u>, ob sich zwischen A, B, C und D eine *oder* zwei strahlende Kugeln befinden.) Da man auch die Gruppe EFG messen muss, reichen 4 Messungen nicht aus (1 + 3 + 1 ist schon 5).
<u>Feststellung</u>: Bei einer Gruppe mit mehr Kugeln brauchen wir mindestens so viele Messungen, um eine strahlende Kugel zu finden wie bei einer Gruppe mit weniger Kugeln.

Wenn zuerst eine Kugelgruppe gemessen wird, die *mehr* als 4 und weniger als 7 Kugeln enthält, reichen 4 Messungen ebenso nicht aus. Begründung: Wenn es in dieser Kugelgruppe genau eine strahlende Kugel gibt, braucht man laut Feststellung *mindestens* 3 weitere Messungen. Damit haben wir die 4 Messungen zwar ausgeschöpft, die zweite Kugel aber noch nicht gefunden.
Beachte: Würden wir alle 7 Kugeln messen, bekämen wir gar keine neuen Informationen. Diese Messung ziehen wir daher nicht in Betracht.
Alternativlösung zu Teil 3: Die 2 strahlenden Kugeln sind genau ein Paar von diesen 21 Paaren: AB, AC, AD, AE, AF, AG, BC, BD, BE, BF, BG, CD, CE, CF, CG, DE, DF, DG, EF, EG, FG. Die Aufgabe zu lösen bedeutet, von diesen 21 Paaren das Richtige zu finden.
Im 1. Schritt führen wir *irgendeine* Messung durch (mit einer Kugel oder mit mehreren Kugeln). Dadurch wird die Anzahl der in Frage kommenden Paare kleiner als 21. Wir werden nun zeigen, dass bei *jeder* Messung im ungünstigen Fall mindestens 11 Paare übrig bleiben.
Wir erklären den Gedankengang zuerst an einem Beispiel. Angenommen, wir messen die Gruppe AB und untersuchen dabei beide möglichen Ausgänge:
Wenn Strahlung angezeigt wird, dann strahlt A oder B oder beide strahlen. Die 21 Paare können wir folgendermaßen sinnvoll unterteilen:

Hier muss die Lösung sein.	Hier kann die Lösung nicht sein.
AB, AC, AD, AE, AF, AG, BC, BD, BE, BF, BG	CD, CE, CF, CG, DE, DF, DG, EF, EG, FG

Wenn keine Strahlung angezeigt wird, dann strahlt weder A noch B. Die 21 Paare können wir folgendermaßen sinnvoll unterteilen:

Hier muss die Lösung sein.	Hier kann die Lösung nicht sein.
CD, CE, CF, CG, DE, DF, DG, EF, EG, FG	AB, AC, AD, AE, AF, AG, BC, BD, BE, BF, BG

Wir stellen fest: Bei Strahlung gibt es 11 Paare bei „Hier muss die Lösung sein“, ansonsten nur 10. Den ungünstigen Fall stellen hier die 11 Paare dar.
Allgemein gilt: *Unabhängig* davon, welche Messung wir zuerst durchführen, können wir die 21 Paare stets in zwei Gruppen unterteilen, und zwar in „Hier muss die Lösung sein“ und „Hier kann die Lösung nicht sein“. Es wird Strahlung angezeigt oder nicht. Der Wechsel von „Strahlung“ zu „keine Strahlung“ bedeutet, dass die zwei Gruppen einfach vertauscht werden.
Im ungünstigen Fall beinhaltet „Hier muss die Lösung sein“ mindestens die Hälfte von 21, also mindestens 11 Paare (21 : 2 = 10,5 müssen wir aufrunden).
Beachte: Die genaue Anzahl hängt von der Messung ab. Wenn wir zuerst die Kugel A abmessen und sie nicht strahlt, dann gibt es bei „Hier muss die Lösung sein“ diese Paare: BC, BD, BE, BF, BG, CD, CE, CF, CG, DE, DF, DG, EF, EG, FG – statt 11 also 15. Wichtig dabei: *Mindestens 11 Paare* gibt es sicher, und zwar *von der ersten Messung unabhängig*.
Wir führen nun unseren Gedankengang fort. Allgemein gilt:

Unabhängig davon, was bei der 2. Messung gemessen wird, beinhaltet im ungünstigen Fall „Hier muss die Lösung sein“ mindestens die Hälfte von 11, also mindestens 6 Paare (11 : 2 = 5,5 müssen wir aufrunden).
Unabhängig davon, was bei der 3. Messung gemessen wird, beinhaltet im ungünstigen Fall „Hier muss die Lösung sein“ mindestens die Hälfte von 6, also mindestens 3 Paare.
Unabhängig davon, was bei der 4. Messung gemessen wird, beinhaltet im ungünstigen Fall „Hier muss die Lösung sein“ mindestens die Hälfte von 3, also mindestens 2 Paare (3 : 2 = 1,5 müssen wir aufrunden).
Aus dem Gedankengang folgt: Egal wie geschickt wir die 4 Messungen auch gestalten, stets gibt es solche Ausgänge dieser Messungen, so dass am Ende „Hier muss die Lösung sein“ noch mindestens 2 Paare aus den ursprünglich 21 Paaren beinhaltet. Dies bedeutet: Wir können mit 4 Messungen das gesuchte Paar nicht eindeutig identifizieren.
<u>Verallgemeinerung</u>: Kamen *vor* einer Messung n Paare in Frage, so bleiben *nach* der Messung noch mindestens $\frac{n}{2}$ Paare übrig (wenn $\frac{n}{2}$ keine ganze Zahl ist, runden wir sie auf).
Wir können nun „rückwärts denken“. Die Lösung können wir nach 1 Messung aus höchstens 2 Paaren, nach 2 Messungen aus höchstens $2 \cdot 2 = 2^2 = 4$ Paaren, nach 3 Messungen aus höchstens $2^3 = 8$ Paaren, nach 4 Messungen aus höchstens $2^4 = 16$ Paaren sicher finden. Da $16 < 21$, reichen 4 Messungen nicht aus.
<u>Allgemein gilt</u>: Nach n Messungen könnten wir aus höchstens 2^n Paaren die Lösung sicher finden.
<u>Beachte</u>: Wenn 4 Messungen nicht ausreichen, dann reichen 3 Messungen auch nicht aus.

(A) 10% **(B)** 13% **(C) 33%** **(D) 41%** **(E)** 19%