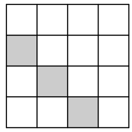
„Blick ins Buch“
Bolyai Teamwettbewerb 2017

Die Prozentsätze geben an, welcher Anteil der Teilnehmer die einzelnen Lösungen angekreuzt hat. Die richtigen Antworten sind fett gedruckt und durch eine Schraffierung hervorgehoben.

Klasse 10

3. In jedes der Felder der 4×4 Tabelle soll eine der Zahlen 1, 2, 3 oder 4 so eingetragen werden, dass in jeder Zeile, in jeder Spalte und in den beiden Diagonalen der Tabelle alle vier Zahlen vorkommen. Was kann die Summe der drei Zahlen sein, die in die schraffierten Felder eingetragen werden?



(A) *8* **(B)** *9* **(C)** *10* **(D)** *11* **(E)** *12*

Lösung: In **Teil 1** zeigen wir, dass **8**, **9**, **10** und **11** Lösungen sind. Dazu geben wir je ein passendes Beispiel an:

3	1	2	4
2	4	3	1
4	2	1	3
1	3	4	2

Summe 8

2	3	4	1
4	1	2	3
1	4	3	2
3	2	1	4

Summe 9

2	1	3	4
3	4	2	1
4	3	1	2
1	2	4	3

Summe 10

2	1	4	3
4	3	2	1
3	4	1	2
1	2	3	4

Summe 11

<u>Bemerkung</u>: Wenn wir bereits eine Lösung gefunden haben, können die anderen mit deren Hilfe ziemlich schnell ermittelt werden. <u>Beispiel</u>: Aus der Lösung für 11 entsteht die Lösung für 10, wenn wir überall 3 und 4 vertauschen.
<u>Anregung</u>: Der geneigte Leser möge andere, ähnliche Beispiele finden.
In **Teil 2** zeigen wir, dass 12 <u>keine</u> Lösung ist. Begründung: Die 12 kann nur zu Stande kommen, wenn in jedem der drei Felder eine 4 steht. Dann könnte aber in jener Diagonale, die das obere linke Feld mit dem unteren rechten Feld verbindet, <u>keine</u> 4 stehen (sonst gäbe es in einer der ersten drei Spalten oder in der untersten Reihe zwei 4-er). Damit wäre die Bedingung <u>nicht</u> erfüllt.

(A) 69% **(B) 51%** **(C) 76%** **(D) 55%** **(E)** 9%

13. An einem Schachwettbewerb nahmen zwei Neuntklässler und einige Zehntklässler teil (aus anderen Klassenstufen gab es keine Teilnehmer). Jeder spielte gegen jeden genau ein Spiel. Ein Sieg ist 1 Punkt, ein Unentschieden 0,5 Punkte und eine Niederlage ist 0 Punkte wert. Die zwei Neuntklässler gewannen zusammen genau 8 Punkte. Jeder Zehntklässler erreichte dieselbe Punktzahl wie jeder andere Zehntklässler. **Die Frage**: Wie viele Zehntklässler konnten insgesamt am Wettbewerb teilgenommen haben?

(A) *weniger als 3* **(B)** *weniger als 5* **(C)** *weniger als 7*
(D) *weniger als 10* **(E)** *mehr als 12*

Lösung: Wir bezeichnen die Anzahl der Teilnehmer aus Klasse 10 mit n, die von ihnen jeweils erreichte gleiche Punktzahl mit m. Dann gilt:
<u>1. Feststellung</u>: Die Gesamtanzahl der Teilnehmer beträgt $n + 2$. Jeder Teilnehmer spielt gegen $n + 1$ Gegner.
Dies wären $(n + 2)(n + 1)$ Spiele. Da aber so jedes Spiel doppelt gezählt wurde, müssen wir das Ergebnis noch durch 2 teilen. Daraus folgt:
<u>2. Feststellung</u>: Es wurden insgesamt $\frac{(n+2)(n+1)}{2}$ Spiele gespielt.
<u>3. Feststellung</u>: Bei jedem Spiel wurde genau 1 Punkt verteilt. Begründung: $1 + 0 = 1$, $0 + 1 = 1$ und $0{,}5 + 0{,}5 = 1$.
Aus der 2. und 3. Feststellung folgt:
<u>4. Feststellung</u>: Die Gesamtzahl der erreichten Punkte ist $\frac{(n+2)(n+1)}{2}$.
Andererseits gilt aber auch:
<u>5. Feststellung</u>: Die Gesamtzahl der erreichten Punkte beträgt $mn+8$. Begründung: Die n Zehntklässler gewannen zusammen genau mn Punkte, die zwei Neuntklässler gewannen zusammen genau 8 Punkte.
Aus der 4. und 5. Feststellung folgt: $\frac{(n+2)(n+1)}{2} = mn+8$ oder

$n^2+3n+2=2mn+16$ oder noch $n(n+3-2m)=14$ (*)

<u>6. Feststellung</u>: Der Term $n + 3 - 2m$ ist eine positive ganze Zahl. Begründung: n ist eine natürliche Zahl. m ist ein Vielfaches von 0,5 und daher muss $2m$ eine ganze Zahl sein. Da in der Gleichung (*) sowohl n als auch 14 positive ganze Zahlen sind, muss $n + 3 - 2m$ eine positive ganze Zahl sein.
Aus (*) und aus der 6. Feststellung folgt:
<u>7. Feststellung</u>: n ist ein Teiler von 14.
Daraus folgt: Für n kommen nur die Werte 1, 2, 7, 14 in Frage. Wir führen nun eine Fallunterscheidung durch.
<u>1. Fall</u>: $n = 1$. Eingesetzt in (*) folgt $1\cdot(1+3-2m)=14$, d. h. $m = -5$. Dies geht aber als Punktzahl <u>nicht</u>. Dieser Fall bringt also <u>keine</u> Lösung.
<u>2. Fall</u>: $n = 2$. Eingesetzt in (*) folgt $2\cdot(2+3-2m)=14$, d. h. $m = -1$. Dies geht aber als Punktzahl <u>nicht</u>. Dieser Fall bringt also <u>keine</u> Lösung.
<u>3. Fall</u>: $n = 7$. Aus (*) folgt $7\cdot(7+3-2m)=14$, also $m = 4$.
<u>4. Fall</u>: $n = 14$. Aus (*) folgt $14\cdot(14+3-2m)=14$, also $m = 8$.

(A) 1% **(B)** 24% **(C)** 23% **(D) 62%** **(E) 31%**