10. Für die Zahl 31 gilt: $(3+1)^2 = 16$ bzw. $31^2 = 961$ und $9+6+1=16$. Wie viele zweistellige Zahlen gibt es insgesamt mit dieser Eigenschaft: Wenn man die Quersumme der Zahl quadriert erhält man dasselbe Ergebnis wie wenn man die Quersumme der quadrierten Zahl berechnet.
Bemerkung: Unter Quersumme einer Zahl versteht man die Summe aller Ziffern der Zahl.

(A) *4* **(B)** *7* **(C)** *8* **(D)** *9* **(E)** *10*

11. Renate schreibt entlang eines Kreises einige nicht negative (nicht unbedingt unterschiedliche) ganze Zahlen so auf, dass gilt: Jede Zahl ist gleich der positiven Differenz der nächsten zwei Zahlen, die im Uhrzeigersinn folgen. Die Summe aller Zahlen beträgt 26.
Die Frage: Wie viele Zahlen kann Renate insgesamt aufgeschrieben haben?

(A) *3* **(B)** *7* **(C)** *13* **(D)** *26* **(E)** *39*

12. Im gleichschenkligen Dreieck ABC ($\overline{AC} = \overline{BC}$) schließen zwei Höhen (oder deren Verlängerungen) einen 70° Winkel ein. Wie groß kann ein (beliebiger) Innenwinkel des Dreiecks ABC sein?

(A) *35°* **(B)** *40°* **(C)** *45°* **(D)** *50°* **(E)** *55°*

13. Im Viereck $ABCD$ ist E der Mittelpunkt der Seite BC und F der Mittelpunkt der Seite CD. Die Strecken AE, AF und EF zerlegen das Viereck in die Dreiecke ABE, AEF, ADF und CEF. Die Maßzahlen der Flächeninhalte dieser vier Dreiecke sind vier natürliche Zahlen (die Flächeneinheit ist cm^2). Schreibt man diese vier Zahlen in aufsteigender Reihenfolge auf, so stellt man fest: Es handelt sich um vier aufeinanderfolgende natürliche Zahlen. **Die Frage**: Höchstens wie viele cm^2 kann der Flächeninhalt des Dreiecks ABD betragen?
Bemerkung: Alle vier Innenwinkel des Vierecks sind kleiner als 180°.

(A) *4* **(B)** *6* **(C)** *8* **(D)** *9* **(E)** *10*

Löst die folgende Aufgabe an der angegebenen Stelle des Antwortblattes!

14. Wir betrachten eine positive natürliche Zahl a. Dies ist die *erste Zahl*. Eine *zweite Zahl* definieren wir als $a + 1$. Eine *dritte Zahl* definieren wir als das Produkt der ersten zwei Zahlen plus 1, also $a \cdot (a+1) + 1$. Eine *vierte Zahl* definieren wir als das Produkt der ersten drei Zahlen plus 1, also als $a \cdot (a+1) \cdot (a(a+1)+1)+1$. Dieses Verfahren setzen wir so lange fort, bis wir 100 Zahlen definiert haben. Wenn wir die Zahlen mit $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_{100}$ bezeichnen, dann gilt: $a_1 = a$, $a_2 = a_1 + 1$, $a_3 = a_1 \cdot a_2 + 1$, $a_4 = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 + 1$ usw.
Beweise, dass für diese 100 Zahlen $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_{100}$ gilt: Die positive Differenz zweier benachbarter Zahlen ist stets eine Quadratzahl.
Bemerkung: Die Quadratzahlen sind: 1, 4, 9, 16, 25, 36 usw.

„Als Gehirnforscher wünsche ich allen Menschen, dass wir trotz stark wachsender Informationsflut die Fähigkeit bewahren, auf unsere innere Stimme zu hören. Nur so können wir durch Kreativität und durch den Geist der Zusammenarbeit unsere Wünsche verwirklichen und dem Gemeinwohl dienen."

Prof. Dr. Freund Tamás

BOLYAI MATHEMATIK TEAMWETTBEWERB®

C. F. GAUSS

2019

1. RUNDE

KLASSE 11
(DEUTSCHLAND)

SCHULSTUFE 11
(ÖSTERREICH)

J. BOLYAI

FÖRDERER DES WETTBEWERBS:
PROF. DR. FREUND TAMÁS
Mitglied der Leopoldina, der Nationalen Akademie der Wissenschaften, Vizepräsident der Ungarischen Akademie

BEGRÜNDER DES WETTBEWERBS UND ERSTELLER DER AUFGABEN:
NAGY-BALÓ ANDRÁS, *Mathematiklehrer*

ÜBERSETZER DER AUFGABEN:
ATTILA FURDEK, *Mathematiklehrer*

LEKTOR DER ÜBERSETZUNG:
MATTHIAS BENKESER, *Mathematiklehrer*

KOORDINATORIN:
RITA FESER, *Mathematiklehrerin*

BETREIBER DER HOMEPAGE UND DES INFORMATISCHEN SYSTEMS:
GEORG PROBST, *Informatiker*
CSUKA RÓBERT, *Elektroingenieur*

www.bolyaiteam.at / www.bolyaiteam.de

Bolyai Team® **Klasse 11 / Schulstufe 11** **15. Januar 2019**

Markiert die Lösungen der Aufgaben 1-13 auf dem Antwortblatt mit X. Bei den Aufgaben können auch mehrere richtige Antworten vorkommen.

1. An einer Tafel stehen die Zahlen 51 und 30. In einem ersten Schritt bildet Daniel die positive Differenz dieser Zahlen (also 51 – 30 = 21) und schreibt sie an die Tafel. Jetzt stehen an der Tafel die Zahlen 51, 30 und 21. In einem zweiten Schritt bildet Daniel die positive Differenz zweier dieser Zahlen und schreibt das Ergebnis ebenfalls an die Tafel. Im nächsten Schritt bildet er wieder die positive Differenz zweier beliebiger Zahlen, die an der Tafel stehen, und schreibt das Ergebnis an die Tafel. Dieses Verfahren wird beliebig oft fortgesetzt. **Die Frage**: Welche der aufgeführten Zahlen kann im Verlauf dieses Verfahrens an der Tafel stehen?

(A) *3* **(B)** *10* **(C)** *12* **(D)** *48* **(E)** *50*

2. Jemand hat einige quadratische Platten auf einen Tisch gelegt, so dass jede Platte genau drei andere Platten entlang einer Seite berührt. Wie viele quadratische Platten können insgesamt auf dem Tisch liegen?
<u>1. Bemerkung</u>: Die Platten können unterschiedlich groß sein.
<u>2. Bemerkung</u>: Die Berührung entlang einer Seite kann sich über die gesamte Seite erstrecken oder nur über einen Teil der Seite.

(A) *5* **(B)** *6* **(C)** *7* **(D)** *13* **(E)** *14*

3. Im Inneren eines Parallelogramms $ABCD$ liegt der Punkt P. Die Strecken PA, PB, PC und PD zerlegen das Parallelogramm in die Dreiecke ΔABP, ΔBCP, ΔCDP und ΔDAP. Drei dieser Dreiecke haben die Flächeninhalte 4 cm^2, 5 cm^2 und 6 cm^2 (in beliebiger Reihenfolge). **Die Frage**: Wie viele cm^2 kann der Flächeninhalt des vierten Dreiecks betragen?

(A) *3* **(B)** *4* **(C)** *5* **(D)** *6* **(E)** *7*

4. Max schreibt drei (nicht unbedingt verschiedene) ganze Zahlen an die Tafel. Sophie stellt fest: Wählt man zwei beliebige von diesen Zahlen aus und multipliziert sie, erhält man als Ergebnis stets die dritte, nicht ausgewählte Zahl. **Die Frage:** Was kann die Summe der drei Zahlen ergeben?

(A) *–1* **(B)** *0* **(C)** *1* **(D)** *2* **(E)** *3*

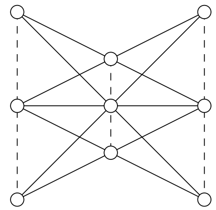
5. Peter schreibt einige (nicht unbedingt verschiedene) nicht negative ganze Zahlen auf. Bea bildet alle erdenklichen Summen von je 4 beliebigen der aufgeschriebenen Zahlen. Sie stellt fest: Keine dieser Summen ist teilbar durch 4. **Die Frage:** Wie viele Zahlen kann Peter aufgeschrieben haben?

(A) *4* **(B)** *5* **(C)** *6* **(D)** *7* **(E)** *8*

6. Entlang eines geraden Flurs gibt es n Zimmer, in denen sich insgesamt $n+1$ Personen befinden. An der Tür des ersten Zimmers steht das Schild: „In diesem Zimmer gibt es genau 1 Person". An der Tür des zweiten Zimmers steht das Schild: „In diesem Zimmer gibt es genau 2 Personen". Diese Beschilderung setzt sich in gleicher Weise fort. An der Tür des n-ten Zimmers steht also das Schild: „In diesem Zimmer gibt es genau n Personen". Man weiß: Genau eine dieser Aussagen ist falsch.
Die Frage: Wie viele Zimmer kann es entlang des Flurs geben?

(A) *1* **(B)** *2* **(C)** *3* **(D)** *4* **(E)** *5*

7. Die nebenstehende Figur zeigt 9 Äpfel in 10 Reihen (in jeder Reihe befinden sich genau 3 Äpfel). Es ist bekannt:
I. Das Gesamtgewicht der Äpfel ist in neun Reihen gleich.
II. Das Gesamtgewicht der Äpfel ist in genau einer Reihe abweichend.
Man hat eine Waage zum Wiegen der Äpfel.
Die Frage: Durch wie viele Messungen kann man auf jeden Fall entscheiden, welche die Reihe mit dem abweichenden Gesamtgewicht ist?



<u>1. Bemerkung</u>: Die Frage bezieht sich auf die unten aufgeführten Zahlen.
<u>2. Bemerkung</u>: Die Waage liefert stets haargenaue Messergebnisse.
<u>3. Bemerkung</u>: Logisches Denken spielt bei der Lösung eine Schlüsselrolle.

(A) *0* **(B)** *1* **(C)** *3* **(D)** *5* **(E)** *9*

8. Das Dreieck ABC ist weder gleichschenklig noch gleichseitig. Die Senkrechte von A auf die Winkelhalbierende des Innenwinkels bei C schneidet CB (oder deren Verlängerung) in M. Die Senkrechte von B auf die Winkelhalbierende des Innenwinkels bei C schneidet CA (oder deren Verlängerung) in N. Ferner ist bekannt: $\overline{CN}$= 8 cm und $\overline{BM}$ = 1 cm.
Die Frage: Wie viele cm lang kann die Seite CA sein?

(A) *7* **(B)** *8* **(C)** *9* **(D)** *10* **(E)** *11*

9. „Quadratland" liegt hinter den sieben Bergen bei den sieben Zwergen. Es ist quadratisch und besteht aus lauter quadratischen Regionen (diese decken Quadratland komplett und ohne Überlappungen ab). Die Regionen kommen in genau zwei Größen vor. Es gibt also kleine Regionen (diese sind alle gleich große Quadrate) und große Regionen (diese sind ebenfalls alle gleich große Quadrate). Zudem gibt es gleich viele kleine wie große Regionen.
Die Frage: Aus wie vielen Regionen kann Quadratland bestehen?
<u>Bemerkung</u>: Es gibt keine Einschränkung zu den Seitenlängen der Quadrate.

(A) *6* **(B)** *8* **(C)** *10* **(D)** *18* **(E)** *40*

Achtung! Aufgaben 10-14 folgen auf der nächsten Seite.