BOLYAI MATHEMATIK TEAMWETTBEWERB
15. JANUAR 2019

LÖSUNGSSCHLÜSSEL

	Klasse 3	Klasse 4	Klasse 5		Klasse 6	Klasse 7	Klasse 8	
1.	**B C**	**D E**	**A B**	1.	**C**	**A D**	**D**	1.
2.	**A D**	**D E**	**A B C D**	2.	**B C D E**	**A B C E**	**A B C D**	2.
3.	**C E**	**E**	**C**	3.	**B C**	**A B C D E**	**B E**	3.
4.	**B**	**A D**	**A B C D E**	4.	**B C D**	**B C**	**B D**	4.
5.	**C**	**B C D E**	**B C D E**	5.	**E**	**B C**	**A C**	5.
6.	**A B D E**	**B C**	**D**	6.	**B C**	**A B D E**	**A B C D E**	6.
7.	**C**	**B C D**	**C D E**	7.	**A B C D E**	**A B C E**	**A B C E**	7.
8.	**A C**	**C**	**A B**	8.	**A C E**	**B E**	**A B C E**	8.
9.	**B**	**B**	**A B C D**	9.	**B C D**	**A B C D E**	**A C D**	9.
10.	**B C E**	**B**	**A B**	10.	**C D**	**A B D**	**B C D**	10.
11.	**A B**	**B**	**A B D E**	11.	**D E**	**B C D**	**D**	11.
12.	**C**	**E**	**C**	12.	**A C**	**A C E**	**A B D E**	12.
13.	**A B C D**	**B C D**	**C**	13.	**E**	**A C**	**B E**	13.
Max. Punkte	***182 + 16***	***180 + 16***	***190 + 16***	*Max. Punkte*	***187 + 16***	***197 + 16***	***193 + 16***	*Max. Punkte*

	Klasse 9	Klasse 10		Klasse 11	Klasse 12	
1.	**B C D**	**B C D**	1.	**A C D**	**A C E**	1.
2.	**B**	**A B C D E**	2.	**B E**	**A B C D E**	2.
3.	**A B**	**A B**	3.	**A C E**	**A C E**	3.
4.	**B C**	**D**	4.	**A B E**	**A B C D E**	4.
5.	**A B C D E**	**B C D**	5.	**A B C**	**C D E**	5.
6.	**B**	**A E**	6.	**A C**	**B C D**	6.
7.	**A C E**	**A C**	7.	**A B C D E**	**A B C D**	7.
8.	**B C D**	**A B C**	8.	**A C**	**C E**	8.
9.	**A B C**	**A B C D E**	9.	**D E**	**B**	9.
10.	**A B C**	**A B C D E**	10.	**D**	**D E**	10.
11.	**D**	**B C D**	11.	**A E**	**C D**	11.
12.	**B E**	**B**	12.	**A B E**	**A B C**	12.
13.	**A B C D E**	**B**	13.	**B**	**B**	13.
Max. Punkte	***190 + 16***	***192 + 16***	*Max. Punkte*	***188 + 16***	***193 + 16***	*Max. Punkte*

Klasse 3: Es gibt folgende zwei Lösungen:

4	1	2	3
2	3	4	1
3	4	1	2
1	2	3	4

4	1	3	2
2	4	1	3
3	2	4	1
1	3	2	4

Pro korrekte Tabelle gibt es je **8 Punkte**. Wenn nur so viel entdeckt wurde, dass in das Feld oben links die 4 und in das Feld unten links die 1 kommt, so gibt es dafür nur **2 Punkte** (je ein Punkt). (**maximal 16 Punkte**).

Klasse 4: Die Summe der acht Zahlen ist 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 36. Die gleiche Summe in jeder Reihe (und in jeder Spalte) ist damit 12 (ein Drittel von 36). Durch systematisches Probieren erhalten wir:

4	8	
6	1	5
2	3	7

Figur 1

4	8	
2	3	7
6	1	5

Figur 2

5	7	
1	3	8
6	2	4

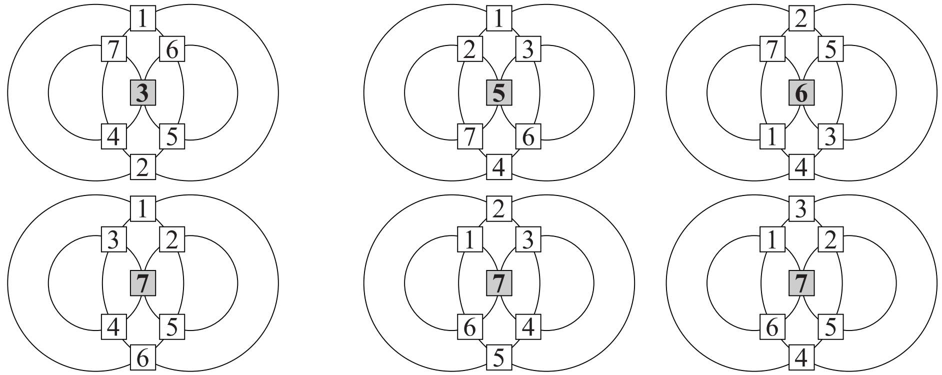
Figur 3

7	5	
3	1	8
2	6	4

Figur 4

Bemerkung: *Figur 2* entsteht aus *Figur 1*, indem man zwei Zeilen vertauscht. *Figur 4* entsteht aus *Figur 3*, indem man zwei Spalten vertauscht.
Für das Zeichnen von *Figur 1* und *Figur 2* gibt es **8 Punkte**. Wenn jedoch nur eine davon gezeichnet wurde, gibt es dafür **6 Punkte**. Für das Zeichnen von *Figur 3* und *Figur 4* gibt es ebenfalls **8 Punkte**. Wenn jedoch nur eine davon gezeichnet wurde, gibt es dafür **6 Punkte**.
Bei falschen Figuren erfolgt kein Punktabzug. Sie werden einfach nicht gewertet (**maximal 16 Punkte**).

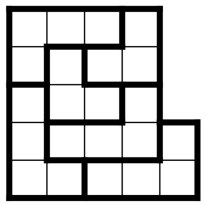
Klasse 5: In das schaffierte Kästchen können nur die Zahlen 3, 5, 6 und 7 kommen. Die Summe der zwei Zahlen aus den zwei Kästchen ganz oben und ganz unten muss die Zahl aus dem schraffierten Kästchen ergeben.
Durch systematisches Probieren erhalten wir:



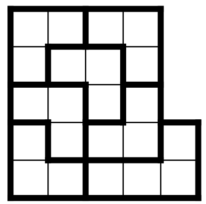
Für jede Figur, bei der im schraffierten Kästchen eine der Zahlen 3, 5, 6 oder 7 steht, gibt es je **4 Punkte**.
Wenn mehrere richtige Figuren zur Zahl 7 vorhanden sind, gibt es dafür nur **4 Punkte**.
Wenn mehrere Figuren zur Zahl 7 vorhanden sind, wobei darunter sowohl richtige als auch falsche sind, gibt man nur **2 Punkte** dafür (statt **4 Punkte**). (**maximal 16 Punkte**).

Klasse 6: Wir haben zwei mögliche Zerlegungen abgebildet. Für jede korrekte Zerlegung gibt es je **8 Punkte** (**maximal 16 Punkte**).

6 Teile:



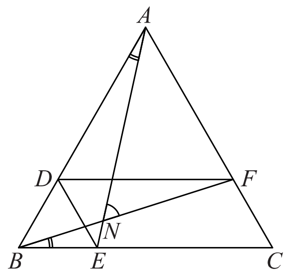
7 Teile:



Klasse 7: Eine solche Zahl hat die Form $\overline{7abcd}$. Wegen II. gilt: $a + b + c + d = 4$ (11 –7). Wir untersuchen nun mehrere Fälle.
1. Fall: Von den vier Ziffern *a*, *b*, *c*, *d* ist eine die 4 und drei sind Nullen. Es entstehen folgende Zahlen: 74000, 70400, 70040, 70004, also *4* Zahlen (**2 Punkte**).
2. Fall: Von den vier Ziffern *a*, *b*, *c*, *d* ist eine die 3, eine ist die 1 und zwei sind Nullen. Es entstehen folgende Zahlen: 73100, 73010, 73001, 71300, 71030, 71003, 70310, 70301, 70130, 70103, 70031, 70013 also *12* Zahlen (**4 Punkte**).
3. Fall: Von den vier Ziffern *a*, *b*, *c*, *d* sind zwei je eine 2 und zwei sind Nullen. Es entstehen folgende Zahlen:
72200, 72020, 72002, 70220, 70202, 70022, also *6* Zahlen (**3 Punkte**).
4. Fall: Von den vier Ziffern *a*, *b*, *c*, *d* ist eine die 2, zwei sind je eine 1 und eine ist die Null. Es entstehen folgende Zahlen: 72110, 72101, 72011, 71210, 71201, 71120, 71102, 71021, 71012, 70211, 70121, 70112, also *12* Zahlen (**4 Punkte**).
5. Fall: Alle vier Ziffern *a*, *b*, *c*, *d* sind je eine 1. Es entsteht die Zahl 71111, also nur *1* Zahl (2 Punkte).
Insgesamt gibt es *4* + *12* + *6* + *12* + *1* = **35** solche Zahlen (**1 Punkt**). (**maximal 16 Punkte**).

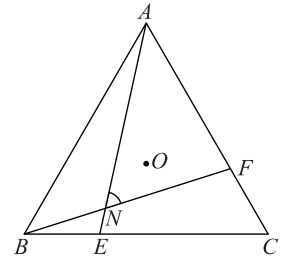
Klasse 8: Es gibt zwei Lösungen: Die Zahlen 2 und 6 (**3 Punkte**) bzw. –4 und 0 (**3 Punkte**). Probe: (2 + 2) + (6 + 2) = 12 und $2\cdot 6 = 12$ (**2 Punkte**) bzw. (–4 + 2) + (0 + 2) = 0 und $-4\cdot 0 = 0$ (**2 Punkte**).
Eine mögliche Begründung dafür, dass es keine weiteren Lösungen gibt: Die zwei Zahlen seien *a* und *b*. Laut Bedingung gilt $ab = a + b + 4 \Rightarrow ab - a - b = 4 \Rightarrow (a-1)(b-1) = 5$ (*). Wir schreiben 5 als Produkt von zwei ganzen Zahlen: $5 = 1\cdot 5$ oder $5 = (-5)\cdot(-1)$ und arbeiten mit (*).
Wenn $(a-1)(b-1) = 1\cdot 5$, dann: $a - 1 = 1 \Rightarrow a = 2$ und $b - 1 = 5 \Rightarrow b = 6$, also die erste Lösung.
Wenn $(a-1)(b-1) = (-5)\cdot(-1)$, dann: $a - 1 = -5 \Rightarrow a = -4$ und $b - 1 = -1 \Rightarrow b = 0$, also die erste Lösung.
Bemerkung: Die Reihenfolge der zwei Zahlen spielt keine Rolle.
Es sind also keine weiteren Lösungen entstanden.
Für jede vollständige Begründung gibt es **6 Punkte**. (**maximal 16 Punkte**).

Klasse 9: Laut Angaben ist *CEDF* ein Parallelogramm (**2 Punkte**), daher $\overline{CF} = \overline{ED}$ (**1 Punkt**). Das Dreieck *BED* ist gleichseitig (**2 Punkte**), daher $\overline{BE} = \overline{ED}$ (**1 Punkt**). Daraus folgt, dass $\overline{BE} = \overline{CF}$ (**1 Punkt**). Die Dreiecke *ABE* und *BCF* sind kongruent (sws) (**2 Punkte**). Daraus folgt: ∢CBF = ∢BAE (**1 Punkt**).



In jedem Dreieck ist ein Außenwinkel so groß, wie die Summe der zwei nicht anliegenden Innenwinkel. Angewandt auf das Dreieck NAB folgt: ∢ANF = ∢ABN + ∢BAN = 60° –∢CBF + ∢BAN = 60° (**6 Punkte**). (**maximal 16 Punkte**).

Alternativlösung: $\overline{BE} = \overline{CF}$, siehe die erste Lösung (**7 Punkte**). Wir drehen das gleichseitige Dreieck *ABC* um 120° um dessen Mittelpunkt *O*. (**3 Punkte**).



Der Punkt *A* geht in den Punkt *B*, der Punkt *B* in den Punkt *C*, der Punkt *C* geht in den Punkt *A* über. Aus der Seite *AB* wird die Seite *BC*, aus der Seite *BC* die Seite *CA* (**1 Punkt**). Wegen $\overline{BE} = \overline{CF}$ entsteht aus *AE* durch die Spiegelung *BF* (**2 Punkte**).
Daraus folgt: ∢*ENF* und der Drehwinkel 120° sind gleich (**2 Punkte**). Damit ergibt sich ∢*ANF* = 180° – ∢*ENF* = 180° – 120° = 60° (**1 Punkt**). (**maximal 16 Punkte**).

Klasse 10: Die Ungleichung kann man so schreiben: $ab + bc + ca < 2c^2$ (**1 Punkt**) oder $ab + bc + ca < c^2 + c^2$. Mit Hilfe des Satzes von Pythagoras ($c^2 = a^2 + b^2$) folgt $ab + bc + ca < a^2 + b^2 + c^2$ (**3 Punkte**). Wir multiplizieren diese Ungleichung mit 2 und erhalten:
$2ab + 2bc + 2ca < 2a^2 + 2b^2 + 2c^2$ (**3 Punkte**). Durch Umgruppierungen folgt $0 < a^2 - 2ab + b^2 + b^2 - 2bc + c^2 + c^2 - 2ca + a^2$ (**4 Punkte**). Wir wenden nun die binomischen Formeln an und erhalten $0 < (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2$ (*) (**2 Punkte**).
Die Ungleichung (*) stimmt. Quadratzahlen sind nicht negativ und die letzten zwei Quadrate sind streng positiv, weil die Hypotenuse größer ist als die zwei Katheten (**2 Punkte**).
Alle Umformungen waren gleichwertig. Damit ist $\frac{ab+bc+ca}{2} < c^2$ bewiesen (**1 Punkt**). (**maximal 16 Punkte**).

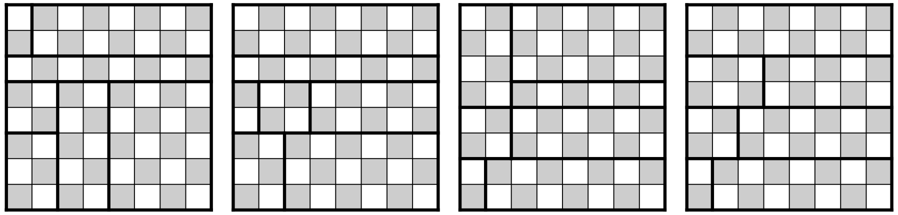
<u>Klasse 11</u>: Wir betrachten zwei beliebige benachbarte Zahlen a_n und a_{n+1} mit n > 1 und bilden deren Differenz $a_{n+1} - a_n$ (**1 Punkt**). Es gilt: $a_{n+1} = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n + 1$ (**1 Punkt**) und $a_n = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_{n-1} + 1$ (**1 Punkt**). Weiter gilt:

$a_{n+1} - a_n = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n + 1 - a_n = 1 - a_n + \left(a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_{n-1}\right) \cdot a_n =$ (**6 Punkte**)

$= 1 - a_n + \left(a_n - 1\right) \cdot a_n = 1 - 2a_n + a_n^2 = \left(1 - a_n\right)^2$ (**6 Punkte**), also eine Quadratzahl (**1 Punkt**).

<u>Bemerkung</u>: Für Untersuchungen mit Zahlenbeispielen gibt es höchstens **4 Punkte**. (**maximal 16 Punkte**).

<u>Klasse 12</u>: Es gibt vier verschiedene Zerlegungen. Unter den Abbildungen haben wir jeweils die Anzahl der weißen Felder in den 7 Rechtecken in aufsteigender Reihenfolge aufgezählt. Für jede korrekte Zerlegung gibt es je **4 Punkte**. Wird dieselbe Zerlegung mehrfach angegeben (siehe die 2. Bemerkung), gibt es nur einmal die 4 Punkte. Für fehlerhafte Zerlegungen gibt es keine Teilpunkte. (**maximal 16 Punkte**).



1; 2; 3; 4; 5, 7; 10   1; 2; 3; 4; 5; 8, 9   1; 2; 3; 4; 6, 7; 9   1, 2; 3, 5; 6; 7; 8