„Als Gehirnforscher wünsche ich allen Menschen, dass wir trotz stark wachsender Informationsflut die Fähigkeit bewahren, auf unsere innere Stimme zu hören. Nur so können wir durch Kreativität und durch den Geist der Zusammenarbeit unsere Wünsche verwirklichen und dem Gemeinwohl dienen."

Prof. Dr. Freund Tamás

Mitglied der Leopoldina, der Nationalen Akademie der Wissenschaften, Vizepräsident der Ungarischen Akademie, Förderer des Wettbewerbs

BOLYAI MATHEMATIK TEAMWETTBEWERB®

C. F. GAUSS

2019

FINALE

KLASSE 12

J. BOLYAI

FÖRDERER DES WETTBEWERBS:
PROF. DR. FREUND TAMÁS
Mitglied der Leopoldina, der Nationalen Akademie der Wissenschaften, Vizepräsident der Ungarischen Akademie

BEGRÜNDER DES WETTBEWERBS UND ERSTELLER DER AUFGABEN:
NAGY-BALÓ ANDRÁS, *Mathematiklehrer*

ÜBERSETZER DER AUFGABEN:
ATTILA FURDEK, *Mathematiklehrer*

LEKTOR DER ÜBERSETZUNG:
MATTHIAS BENKESER, *Mathematiklehrer*

KOORDINATORIN:
RITA FESER, *Mathematiklehrerin*

BETREIBER DER HOMEPAGE UND DES INFORMATISCHEN SYSTEMS:
GEORG PROBST, *Informatiker*
RÓBERT CSUKA, *Elektroingenieur*

www.bolyaiteam.at / www.bolyaiteam.de

Markiert die Lösungen der Aufgaben 1-5 auf dem Antwortblatt mit X.
Bei den Aufgaben können auch mehrere richtige Antworten vorkommen.

1. Sophie schreibt einige ganze Zahlen entlang einer Kreislinie, so dass gilt: Jede Zahl ist größer als die Summe der im Uhrzeigersinn folgenden nächsten zwei Zahlen. Außerdem ist bekannt: Unter den Zahlen gibt es mindestens eine positive Zahl. **Die Frage**: Insgesamt wie viele Zahlen kann Sophie entlang der Kreislinie geschrieben haben?

(A) *3* **(B)** *4* **(C)** *5* **(D)** *7* **(E)** *8*

2. Insgesamt wie viele konvexe Polyeder stimmen in allen Eckpunkten mit den Eckpunkten eines Würfels überein?
<u>Bemerkungen</u>: Jeder Eckpunkt eines solchen Polyeders muss auch Eckpunkt des Würfels sein. Aber nicht jeder Eckpunkt des Würfels muss auch Eckpunkt des Polyeders sein.
Zwei Polyeder, die in Form und Größe übereinstimmen, werden nicht doppelt gezählt.

(A) *9* **(B)** *10* **(C)** *11* **(D)** *12* **(E)** *13*

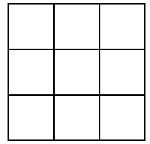
3. Ein Floh sitzt im Punkt A eines Quadrates $ABCD$. Er startet von hier aus und springt zu anderen Eckpunkten des Quadrates $ABCD$. Es ist bekannt:
I. Der Floh kommt irgendwann in jedem Eckpunkt B, C und D an.
II. Bei jedem Sprung beträgt die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$, dass er in einem benachbarten Eckpunkt landet (also nicht diagonal springt).
III. Der Floh hört dann auf zu springen, wenn er auch im letzten Eckpunkt angekommen ist, in dem er noch nicht war.
Die Frage: Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist der letzte Eckpunkt B?

(A) *weniger als* $\frac{1}{4}$ **(B)** $\frac{1}{4}$ **(C)** *mehr als* $\frac{1}{4}$ **(D)** $\frac{1}{3}$ **(E)** $\frac{1}{2}$

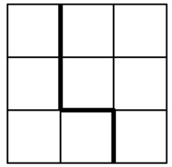
4. Alle Kanten einer vierseitigen quadratischen Pyramide sind 2 cm lang. Eine dreieckige Seitenfläche dieser Pyramide ist die Grundfläche einer zweiten dreiseitigen Pyramide, deren Kanten ebenfalls alle gleich lang sind. Die Gesamtkantenlänge des entstandenen zusammengesetzten Körpers beträgt 18 cm.
Die Frage: Wie viele cm^3 beträgt das Volumen dieses Körpers?

(A) $\sqrt{6}$ **(B)** $\sqrt{8}$ **(C)** 3 **(D)** $\sqrt{10}$ **(E)** $\sqrt{18}$

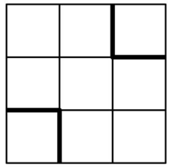
5. Das nebenstehende $3\,cm \times 3\,cm$ große Quadrat besteht aus 9 kleinen Quadraten mit der Seitenlängen 1 cm. Im Inneren des großen Quadrates befinden sich 12 Seiten von kleinen Quadraten. Von diesen 12 Seiten werden vier zufällig markiert.



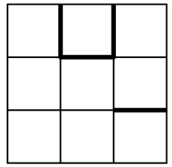
Die Frage: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass diese vier markierten Strecken das große 3 cm × 3 cm Quadrat in mindestens zwei Teile zerlegen?
<u>Erläuterungen an Beispielen</u>: *Figur 1* zeigt eine Zerlegung in zwei Teile und *Figur 2* eine Zerlegung in drei Teile.
<u>Achtung</u>: Markierungen wie z.B. in *Figur 3* gelten auch als Zerlegungen (hier in zwei Teile).



Figur 1



Figur 2



Figur 3

(A) $\frac{191}{495}$ **(B)** $\frac{286}{495}$ **(C)** $\frac{292}{495}$ **(D)** $\frac{303}{495}$ **(E)** $\frac{309}{495}$