11. Es gibt ein dreidimensionales (d.h. nicht alle Seiten befinden sich in derselben Ebene) …

(A) *Viereck, bei dem alle Seiten und Winkel gleich groß sind.*

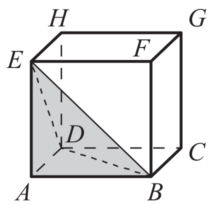
(B) *Fünfeck, das genau 4 rechte Winkel hat und bei dem alle Seiten gleich lang sind.*

(C) *Fünfeck, bei dem genau 4 Seiten gleich lang sind und das nur rechte Winkel hat.*

(D) *Sechseck, das nur rechte Winkel hat und bei dem alle Seiten gleich lang sind.*

(E) *Achteck, das nur rechte Winkel hat und bei dem alle Seiten gleich lang sind.*

12. Betrachten wir die aus einem Eckpunt des Würfels ausgehenden Kanten, so bilden deren Endpunkte einen Tetrader. Des Weiteren betrachten wir alle Punkte im Inneren des Würfels, die sich im gemeinsamen Raum mindenstens zweier solchen Tetraders befinden. Bestimmt die Summe der Volumina der durch diese Punkte gebildeten Räume bezüglich des Würfelvolumens.



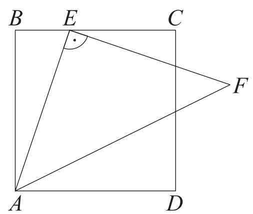
(A) *weniger als ein Viertel* **(B)** *ein Viertel* **(C)** *mehr als ein Viertel*
(D) *die Hälfte* **(E)** *mehr als die Hälfte*

13. Wie lang können die Seiten eines quadratischen Geschenkpapiers sein, um damit einen Quader mit den Kantenlängen $\sqrt{2}$ cm, $2\sqrt{2}$ cm und $3\sqrt{2}$ cm einpacken zu können? Dabei dürfen wir das Papier nicht zerschneiden und der Quader muss vollständig vom Papier bedeckt sein.

(A) *5 cm* **(B)** *7 cm* **(C)** *8 cm* **(D)** *9 cm* **(E)** *11 cm*

Löst die folgende Aufgabe an der angegebenen Stelle des Antwortblattes!

14. Das Quadrat *ABCD* liegt in der Ebene wie rechts dargestellt, das Dreieck *AEF* ist gleichschenklig und hat bei *E* einen rechten Winkel. Bestimmt die Größe des Winkels $\sphericalangle DCF$!



„Als Gehirnforscher wünsche ich allen Menschen, dass wir trotz stark wachsender Informationsflut die Fähigkeit bewahren, auf unsere innere Stimme zu hören. Nur so können wir durch Kreativität und durch den Geist der Zusammenarbeit unsere Wünsche verwirklichen und dem Gemeinwohl dienen."

Prof. Dr. Freund Tamás

BOLYAI MATHEMATIK TEAMWETTBEWERB®

C. F. GAUSS

2020

1. RUNDE

KLASSE 11
(DEUTSCHLAND)

SCHULSTUFE 11
(ÖSTERREICH)

J. BOLYAI

Förderer des Wettbewerbs:
Prof. Dr. Freund Tamás
Mitglied der Leopoldina, der Nationalen Akademie der Wissenschaften, Vizepräsident der Ungarischen Akademie

Begründer des Wettbewerbs und Ersteller der Aufgaben:
Nagy-Baló András, *Mathematiklehrer*

Übersetzer der Aufgaben:
Zsuzsanna Werner, *Mathematiklehrerin*

Lektor der Übersetzung:
Thomas Wilhelm Schwarzer, *Mathematiklehrer*

Koordinatorin:
Zsuzsanna Werner, *Mathematiklehrerin*

Betreiber der Homepage und des informatischen Systems:
Georg Probst, *Informatiker*
Csuka Róbert, *Elektroingenieur*

www.bolyaiteam.at / www.bolyaiteam.de

Bolyai Team® **Klasse 11 / Schulstufe 11** **14. Januar 2020**

Markiert die Lösungen der Aufgaben 1-13 auf dem Antwortblatt mit X. Bei den Aufgaben können auch mehrere richtige Antworten vorkommen.

1. Das erste Glied einer Folge ist 934. Jedes weitere Glied erhalten wir, indem wir die Ziffernsumme des vorherigen Gliedes mit 13 multiplizieren. Welche Zahl ist das 2019te Glied dieser Folge?

(A) *52* **(B)** *91* **(C)** *130* **(D)** *208* **(E)** *934*

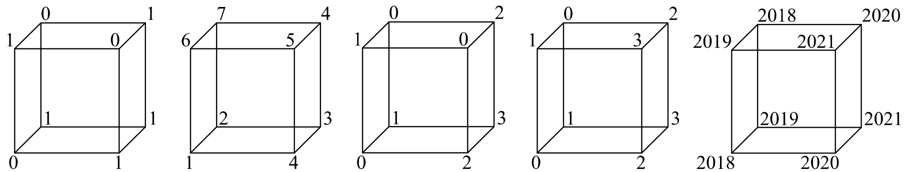
2. Von 10 Zwergen mag jeder genau eine Sorte Eiscreme: Schokolade, Vanille oder Himbeere. Unter den Zwergen gibt es Lügner (die immer lügen) und ehrliche Zwerge (die immer die Wahrheit sagen). Auf die Frage, ob er Schokoladeneis mag, haben 10 Zwerge mit ja geantwortet. Vanilleeis bejahten 5 Zwerge und Himbeereis 1 Zwerg. Wie viele ehrliche Zwerge befinden sich genau unter diesen 10 Zwergen?

(A) *3* **(B)** *4* **(C)** *5* **(D)** *6* **(E)** *8*

3. Welchen der unten stehenden Werte kann der Term $x^2y - y^2x$ annehmen, wenn sowohl x als auch y voneinander unabhängig das Intervall $[0;1]$ durchlaufen?

(A) $-\frac{1}{4}$ **(B)** $\frac{2}{9}$ **(C)** $\frac{1}{4}$ **(D)** $\frac{1}{2}$ **(E)** *1*

4. Wir haben in jede Ecke eines Würfels je eine Zahl geschrieben. In jedem Schritt werden immer die zwei Zahlen entlang einer Würfelkante um 1 erhöht. Mit welchem der untenstehenden Würfel als Ausgangszustand ist es möglich, dass wir mit dieser Methode auf allen acht Ecken des Würfels dieselbe Zahl erhalten?



(A) **(B)** **(C)** **(D)** **(E)**

5. Wie viele solche Seiten kann ein Dreieck genau haben, deren dazugehörige Höhen länger sind als die Seite?

(A) *0* **(B)** *1* **(C)** *2* **(D)** *3*

(E) *Aus den vorherigen Antworten sind genau 3 zutreffend.*

6. Lassen sich solche reellen Zahlen a, b, c und d finden, für die die Gleichungen $x^2 + bx + c = 0$ und $x^2 + ax + d = 0$ gemeinsame Lösungen haben, und gilt …

(A) $0 < a < b < c < d$ **(B)** $a < 0 < b < c < d$ **(C)** $a < b < 0 < c < d$

(D) $a < b < c < 0 < d$ **(E)** $a < b < c < d < 0$

7. Unter den besten 16 Mannschaften der Fußball-Galaxismeisterschaft befinden sich die Teams der Planeten Erde und Mars. Die 16 Teams messen sich nun in der KO-Phase (wie üblich: Achtelfinale, Viertelfinale, Halbfinale und Finale). In jeder Runde werden die zwei Teams, welche gegeneinander antreten müssen, zufällig ausgelost. In jedem Spiel haben beide Teams die gleiche Chance weiterzukommen. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Erde in einer der Runden gegen den Mars spielen wird?

(A) *weniger als 0,125* **(B)** *0,125* **(C)** *weniger als 0,25*

(D) *0,25* **(E)** *0,5*

8. Eines Morgens standen in der Schule an der Tafel alle positiven, benachbarten ganzen Zahlen ab 1 bis zu einer bestimmten Zahl. Der Ordnungsdienst hatte versehentlich eine der Zahlen weggewischt, bevor Eva sie notieren konnte. Sie erinnert sich, dass das arithmetische Mittel der übrig gebliebenen Zahlen genau $\frac{45}{4}$ war. Welche Zahl hatte der Tafeldienst weggewischt?

(A) *3* **(B)** *6* **(C)** *21* **(D)** *22* **(E)** *67*

9. Eine im Dreieck ABC zu $\overline{AC}$ gezogene Parallele schneidet die Seite $\overline{AB}$ im Punkt P und die Seite $\overline{BC}$ im Punkt T. Der Mittelpunkt von $\overline{BC}$ ist M, die Strecken $\overline{AM}$ und $\overline{PT}$ schneiden sich im Punkt Q. Wir wissen, dass $\left|\overline{PQ}\right| = 3$ cm und $\left|\overline{QT}\right| = 5$ cm lang ist. Wie lang kann $\overline{AC}$ sein?

(A) *9 cm* **(B)** *10 cm* **(C)** *11 cm* **(D)** *12 cm* **(E)** *13 cm*

10. Auf einen Globus werden 24 Längenkreise (dies sind in Wirklichkeit keine Kreise, sondern 24 Halbkreise, die vom Nordpol bis zum Südpol reichen), weiterhin 17 Breitenkreise (einer davon ist der Äquator, die anderen sind parallel dazu) eingezeichnet. In wie viele Teile insgesamt zerlegen diese Linien die Oberfläche des Globus?

(A) *204* **(B)** *408* **(C)** *425* **(D)** *432* **(E)** *450*

Achtung! Aufgabe 14 folgt auf der nächsten Seite.