BOLYAI MATHEMATIK TEAMWETTBEWERB
14. JANUAR 2020
LÖSUNGSSCHLÜSSEL

	Klasse 3	Klasse 4	Klasse 5		Klasse 6	Klasse 7	Klasse 8	
1.	**B D**	**D**	**C**	1.	**A D**	**A B D**	**C D**	1.
2.	**B C D**	**E**	**C E**	2.	**A B C D E**	**C D**	**D E**	2.
3.	**D**	**D**	**D**	3.	**D**	**B D**	**B C**	3.
4.	**A B C E**	**C D**	**A E**	4.	**A B D**	**B C E**	**B D E**	4.
5.	**C D E**	**C D E**	**C**	5.	**C**	**E**	**A C E**	5.
6.	**C D E**	**B**	**C**	6.	**D**	**C E**	**C E**	6.
7.	**C**	**C E**	**C**	7.	**C D**	**D**	**B D**	7.
8.	**C**	**C**	**C**	8.	**A B D**	**A B C D E**	**D**	8.
9.	**A B C E**	**D**	**D E**	9.	**D**	**A B C D E**	**D**	9.
10.	**C D**	**A B C D E**	**A B D**	10.	**D**	**A B C**	**A B C D E**	10.
11.	**D**	**C**	**C D**	11.	**A B C D E**	**C**	**A C E**	11.
12.	**B D E**	**A B C D E**	**D**	12.	**A B D**	**A B D**	**A B C D E**	12.
13.	**B C**	**B C D**	**B D E**	13.	**B C D**	**A B C D E**	**A B C**	13.
	202 Punkte	*199 Punkte*	*193 Punkte*		*203 Punkte*	*208 Punkte*	*206 Punkte*	

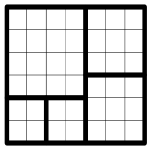
	Klasse 9	Klasse 10	Klasse 11	Klasse 12	
1.	**A B C D E**	**A B C D E**	**C**	**A**	1.
2.	**C E**	**B C D E**	**B**	**D**	2.
3.	**D E**	**B**	**A B C**	**C**	3.
4.	**A D**	**C**	**B D E**	**C D E**	4.
5.	**B**	**C D E**	**A B**	**A D**	5.
6.	**C D E**	**C D**	**C D E**	**C D**	6.
7.	**A E**	**A C D E**	**B C**	**B C**	7.
8.	**A B C D E**	**D**	**B**	**A B C**	8.
9.	**B D E**	**A B C D**	**C**	**A B C D E**	9.
10.	**A B C**	**B C D E**	**D**	**D**	10.
11.	**A B C D**	**A B C**	**A B C D E**	**A B C D**	11.
12.	**D**	**B D**	**C D**	**A B C D E**	12.
13.	**B C D E**	**D**	**B C D E**	**B D**	13.
	209 Punkte	*207 Punkte*	*201 Punkte*	*204 Punkte*	

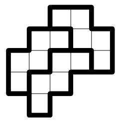
BOLYAI MATHEMATIK TEAMWETTBEWERB – 14. JANUAR 2020 –

LÖSUNGEN VON AUFGABEN 14

Klasse 3: Die zwei Lösungen sind: $4+4+4+4=4\cdot 4$, bzw. $0+0+0+0=0\cdot 0$.
Für verschiedene richtige Lösungen sind je **8 Punkte** zu geben. (**maximal 16 Punkte**).

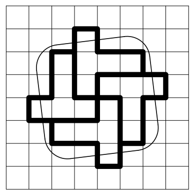
Klasse 4: Die folgenden Abbildungen zeigen je eine Möglichkeit, wie man die Formen zerlegen könnte.





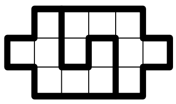
Bei beiden Aufgaben sind für eine richtige Lösung **8 Punkte** zu vergeben. Weitere richtige Lösungen werden nicht gewertet (**maximum 16 Punkte**).

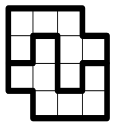
Klasse 5: Es ist nur eine Anordnung möglich, diese ist in der untenstehenden Grafik zu sehen:



Für jedes T, das sich an der richtigen Stelle mit richtiger Orientierung befindet, gibt es **4 Punkte** (**maximal 16 Punkte**).

Klasse 6: Eine mögliche Lösung zeigt die Abbildung:

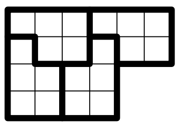


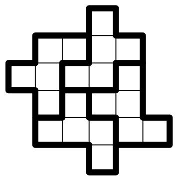


Die vollständige Lösung gibt **16 Punkte**. Falls nur eine Figur wie dargestellt aufgeteilt ist, bekommt die Gruppe **8 Punkte**. Falls eine Gruppe nur eine der Formen in zwei kongruente Teile schneidet, oder beide, aber diese zwei stimmen mit den Teilen der anderen Form nicht überein, bekommt die Gruppe für jede richtige Zeichnung jeweils **2 Punkte**.

(**maximal 16 Punkte**).

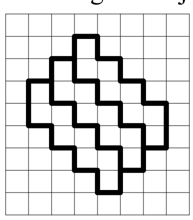
Klasse 7: Je eine mögliche Zerlegung zeigen die folgenden Abbildungen:



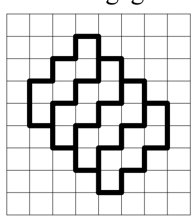


Pro Figur können für eine richtige Zerlegung je **8 Punkte** verteilt werden (**maximal 16 Punkte**).

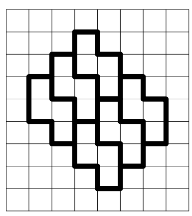
Klasse 8: Eine mögliche Lösung ist für jeden Fall angegeben.



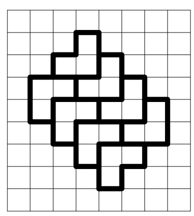
3 Teile



4 Teile



6 Teile



8 Teile

Für jeden Fall kann man für eine richtige Lösung **4 Punkte** geben (**maximal 16 Punkte**).

Klasse 9: Wir addieren jeweils die entsprechenden Seiten der Gleichungen. Somit erhalten wir: $x^2-2y+2+y^2-4z+3+z^2+4x+4=0$ (**4 Punkte**).

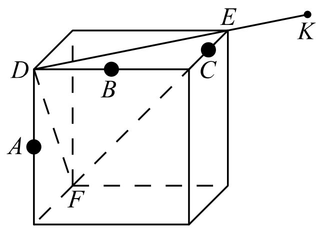
Wir fassen die linke Seite geschickt zusammen: $x^2+4x+4+y^2-2y+1+z^2-4z+4=0$ (**2 Punkte**).

Wir erkennen, dass es sich hierbei um ausquadrierte Ausdrücke der binomischen Formeln der Form $a^2+2ab+b^2$ handelt. Schreiben wir diese Ausdrücke erneut als Klammerausdrücke erhalten wir: $(x+2)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=0$ (**2 Punkte**).

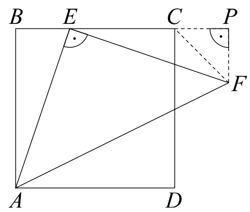
Da das Quadrat aller Klammerausdrücke mindestens 0 sein muss (es also nicht negativ werden kann), kann deren Summe nur dann gleich 0 werden, wenn der Wert der einzelnen Klammern jeweils 0 entspricht (**2 Punkte**).
Daher ist $x+2=y-1=z-2=0$, woraus folgt $x=-2$, $y=1$ und $z=2$ (**1 Punkt**).

Diese Werte eingesetzt erkennen wir, dass sie zum Beispiel Gleichung 1 nicht erfüllen (**2 Punkte**), denn $x^2-2y+2=(-2)^2-2+2=4\neq 0$ (**2 Punkte**). Daher hat das Gleichungssystem keine Lösung, die Lösungsmenge ist leer (**1 Punkt**). Andere Begründungen sind dem oben dargestellten Punktesystem entsprechend zu bewerten. (**maximal 16 Punkte**).

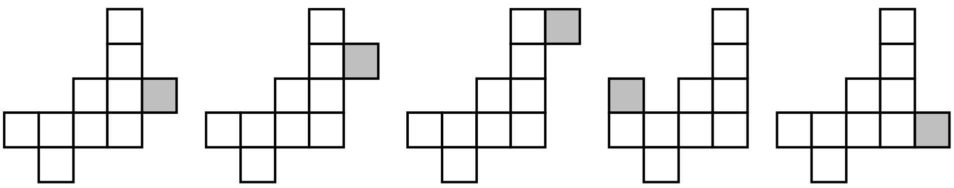
Klasse 10: Die Flächendiagonale $\overline{DE}$ ist parallel zu $\overline{BC}$, die Flächendiagonale $\overline{EF}$ parallel zu $\overline{AB}$. Sei K ein beliebiger Punkt auf der Verlängerung von $\overline{DE}$ nach E (**4 Punkte**). Dann sind die Größen der Winkel $\sphericalangle ABC$ und $\sphericalangle FEK$ gleich (**4 Punkte**). Das Dreieck DEF ist gleichseitig (alle Seiten sind je eine Flächendiagonale des Würfels) (**4 Punkte**), so sind $\sphericalangle DEF=60°$, und $\sphericalangle FEK=120°$. Die Größe des Winkels $\sphericalangle ABC$ ist also 120° (**4 Punkte**). Andere Begründungen (z.B. mit Koordinatengeometrie) sind verhältnismäßig wie oben zu bepunkten (**maximal 16 Punkte**).



Klasse 11: Wir zeichnen eine Normale von F auf die Verlängerung der Seite $\overline{BC}$, deren Schnittpunkt mit der Verlängerung sei P (**4 Punkte**). Dann sind die Dreiecke EFP und AEB kongruent (**2 Punkte**), denn beide sind rechtwinklig, $\sphericalangle FEP=90°-\sphericalangle BEA=\sphericalangle EAB$, zudem sind ihre Hypotenusen gleich lang (**2 Punkte**). Somit ist $\left|\overline{EP}\right|=\left|\overline{AB}\right|=\left|\overline{BC}\right|$, woraus $\left|\overline{BE}\right|=\left|\overline{CP}\right|$ und $\left|\overline{BE}\right|=\left|\overline{PF}\right|$ folgt (**4 Punkte**). Dann ist $\left|\overline{CP}\right|=\left|\overline{PF}\right|$, also ist $\sphericalangle FCP=45°$ und somit $\sphericalangle DCF=45°$ (**4 Punkte**). (**maximal 16 Punkte**).



Klasse 12: Es gibt die folgenden 5 Lösungsmöglichkeiten:



Für die ersten 4 richtigen Lösungen werden je **3 Punkte** verteilt, für die fünfte richtige Lösung **4 Punkte**. Für alle falschen werden je **2 Punkte** abgezogen. Die Gesamtpunktzahl kann nicht weniger als 0 sein (**maximal 16 Punkte**).