**12.** Das Quadrat $ABCD$ ist ein Einheitsquadrat, dessen Seite $\overline{AB}$ durch die beiden Punkte $E$ und $F$ geteilt wird. Bezüglich dieser Punkte gilt: $\left|\overline{AE}\right| = \frac{1}{n}$ und $\left|\overline{BF}\right| = \frac{1}{m}$, wobei $n$ und $m$ natürliche Zahlen sind. Von $B$ aus zeichnen wir eine Gerade so, dass diese bei $B$ einen Winkel von 30° mit der Seite $\overline{AB}$ einschließt. Diese Gerade berührt im Punkt $T$ den Halbkreis, der im Inneren des Quadrats den Durchmesser $\overline{EF}$ hat. Bestimmt die möglichen Werte für $m$ und $n$.

**(A)** *2* **(B)** *3* **(C)** *4* **(D)** *6* **(E)** *8*

**13.** Wir besitzen 27 Würfel der Kantenlänge 1 *cm*. Die Seiten werden farblich gestaltet. Man entscheidet sich für lila, weiße und gelbe Seitenflächen, jede Seite bekommt nur eine Farbe. Man kann nun so färben, dass...

**(A)** *ein 3×3×3-Würfel so zusammengelegt werden kann, dass alle drei Farben auf der Oberfläche sichtbar sind.*

**(B)** *ein 3×3×3-Würfel auf seiner Oberfläche nur lila und weiß ist.*

**(C)** *ein 3×3×3-Würfel eine nur weiße Oberfläche hat bzw. aus denselben kleinen Würfeln ein nur gelber 3×3×3-Würfel entsteht.*

**(D)** *die Forderungen von (C) erfüllt werden und zusätzlich aus den vorhandenen kleinen Würfeln auch ein nur lilafarbener 3×3×3-Würfel gebaut werden kann.*

**(E)** *aus den vorherigen Forderungen genau zwei gelten können.*

*„Als Gehirnforscher wünsche ich allen Menschen, dass wir trotz stark wachsender Informationsflut die Fähigkeit bewahren, auf unsere innere Stimme zu hören. Nur so können wir durch Kreativität und durch den Geist der Zusammenarbeit unsere Wünsche verwirklichen und dem Gemeinwohl dienen."*

*Prof. Dr. Freund Tamás*

# BOLYAI MATHEMATIK TEAMWETTBEWERB®

C. F. GAUSS

## 2021

## 1. RUNDE

### KLASSE 11
(DEUTSCHLAND)

### SCHULSTUFE 11
(ÖSTERREICH)

J. BOLYAI

**Förderer des Wettbewerbs:**
**Prof. Dr. Freund Tamás**
*Mitglied der Leopoldina, der Nationalen Akademie der Wissenschaften, Präsident der Ungarischen Akademie*

**Begründer des Wettbewerbs und Ersteller der Aufgaben:**
**Nagy-Baló András,** *Mathematiklehrer*

**Übersetzer der Aufgaben:**
**Zsuzsanna Werner,** *Mathematiklehrerin*

**Lektor der Übersetzung:**
**Thomas Wilhelm Schwarzer,** *Mathematiklehrer*

**Koordinatorin:**
**Zsuzsanna Werner,** *Mathematiklehrerin*

**Betreiber der Homepage und des informatischen Systems:**
**Georg Probst,** *Informatiker*
**Róbert Csuka,** *Elektroingenieur*

www.bolyaiteam.at / www.bolyaiteam.de

**Markiert die Lösungen der Aufgaben 1-13 auf der Website mit X. Bei den Aufgaben können auch mehrere richtige Antworten vorkommen.**

**1.** Wir quadrieren eine natürliche Zahl und vertauschen anschließend die beiden letzten Ziffern. Hierbei erhalten wir eine Quadratzahl, die auch dann entsteht, wenn wir die ursprüngliche Zahl um 1 erhöhen und danach quadrieren. Insgesamt wie viele solche natürliche Zahlen können wir finden?

**(A)** *0* **(B)** *1* **(C)** *2* **(D)** *3* **(E)** *4*

**2.** Wir suchen die kleinstmögliche positive ganze Zahl *n* so, dass der Wert des Terms $(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)$ ein Vielfaches von 1000 ist. Dann kann man über *n* sagen, dass sie …

**(A)** *kleiner als 75 ist.* **(B)** *mehr als 75 ist.* **(C)** *kleiner als 100 ist.*
**(D)** *größer als 100 ist.* **(E)** *kleiner als 125 ist.*

**3.** Wir betrachten den Winkel im Eckpunkt *B* des Parallelogramms *ABCD*. Die Winkelhalbierende des Winkels schneidet die Gerade *AD* in *P*. Wenn bekannt ist, dass $\left|\overline{PD}\right| = 5\ cm$, $\left|\overline{BP}\right| = 6\ cm$ und $\left|\overline{CP}\right| = 6\ cm$ lang sind, wie lang kann dann die Seite $\overline{AB}$ sein?

**(A)** *4 cm* **(B)** *5 cm* **(C)** *6 cm* **(D)** *8 cm* **(E)** *9 cm*

**4.** Eine Gruppe plant eine geheime Aktion. Aus diesem Grund kommunizieren sie mithilfe einer mathematischen Geheimschrift. Der Anführer hat den Termin der Aktion so verschlüsselt, dass er auf den *n*-ten Tag des Monats Oktober fällt. Für dieses *n* ergibt sich dann das einzige Lösungspaar $(x_0, y_0)$ der Gleichung $2x^2 + 4xy + 7y^2 - 12x - 2y + n = 0$. Welche der Aussagen treffen auf *n* zu?

**(A)** *kleiner als 15* **(B)** *mehr als 18* **(C)** *kleiner als 21*
**(D)** *größer als 21* **(E)** *weniger als 27*

**5.** *x* und *y* sind positive reelle Zahlen. Wir setzen diese in die Terme $x,\ y+\frac{1}{x},\ \frac{1}{y}$ ein. Unter ihnen befindet sich ein größter Wert. Wie viel kann dieser Wert betragen?

**(A)** *1* **(B)** $\frac{4}{3}$ **(C)** $\sqrt{2}$ **(D)** $\frac{3}{2}$ **(E)** $\sqrt{3}$

**6.** Gegeben sind vier Zahlen. Wir bilden alle möglichen Summen aus je zwei der Zahlen. Die vier kleinsten Summen sind dann: 1, 5, 8 und 9. Welche der unten genannten Zahlen können unter den gegebenen vier Zahlen als größte Zahl vorkommen?

**(A)** *8* **(B)** *8,5* **(C)** *9* **(D)** *9,5* **(E)** *10*

**7.** Mike notiert einen Bruch $\frac{a}{b}$ mit dem kleinstmöglichen Nenner so, dass $\frac{47}{245} < \frac{a}{b} < \frac{34}{177}$ gilt; *a* und *b* sind natürliche Zahlen. Dann ist der Zähler des Bruches ...

**(A)** *weniger als 20.* **(B)** *weniger als 30.* **(C)** *mehr als 30.*
**(D)** *mehr als 35.* **(E)** *mehr als 40.*

**8.** Neun verschiedene positive ganze Zahlen ergeben die Summe 200. Dann ist es egal, um welche neun Zahlen es sich handelt, wir können stets vier von diesen so wählen, dass ihre Summe größer ist als ...

**(A)** *96* **(B)** *99* **(C)** *100* **(D)** *101* **(E)** *103*

**9.** In einer Schublade befinden sich drei Paar Socken, die unterscheidbar sind. Wir ziehen blind nacheinander drei Socken heraus. Mit welcher Wahrscheinlichkeit befindet sich unter den gezogenen Socken noch kein Paar?

**(A)** *weniger als 0,33* **(B)** *0,33* **(C)** *mehr als 0,33*
**(D)** *0,4* **(E)** *mehr als 0,4*

**10.** Eine Folge besteht aus denjenigen Vielfachen der Zahl 3, die um 1 kleiner als eine bestimmte Quadratzahl sind. Einige Glieder der Folge sind somit 3, 15, 24, 48, ... Teilen wir nun das 2021-ste Glied der Folge durch 1010, dann ist der Rest ...

**(A)** *1* **(B)** *3* **(C)** *5* **(D)** *7* **(E)** *keiner der gegebenen Werte.*

**11.** Im Dezimalsystem ist eine $(n+1)$-stellige Zahl *A* durch $A = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0}$ gegeben. Schreiben wir nun die Ziffern von rechts nach links auf, so erhalten wir die zu *A* inverse Zahl $A^*$. Sie hat die Form: $A^* = \overline{a_0 a_1 \dots a_{n-1} a_n}$. Folgende Beispiele verdeutlichen das Verhältnis Zahl – Inverse Zahl: 314 und 413; 750 und 57; 20800 und 802. Karl notiert alle vierstelligen Zahlen *A*, für die gilt: $9 \cdot A = A^*$. Welche der untenstehenden Ziffern können dann in diesen vierstelligen Zahlen nicht vorkommen?

**(A)** *0* **(B)** *2* **(C)** *4* **(D)** *6* **(E)** *8*

**Achtung! Die Aufgaben 12-13 folgen auf der nächsten Seite.**