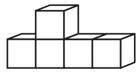
11. Wir kleben fünf gleiche Einheitswürfel so zusammen, dass vier Würfel einen vier Einheiten langen Quader bilden und der fünfte Würfel zu einem der beiden inneren Würfel des Quaders deckungsgleich angepasst wird. Aus wie vielen solchen Körpern insgesamt kann ein kompakter Quader zusammengesetzt werden?



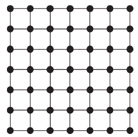
(A) *10* **(B)** *12* **(C)** *16* **(D)** *20* **(E)** *24*

12. Gegeben sind vier positive ganze Zahlen. Vermindern wir jede dieser Zahlen um 3, dann erhöht sich ihr Produkt um 2022. Wenn es vier solche positiven ganzen Zahlen gibt, dann ist eine von ihnen…

(A) *5* **(B)** *6* **(C)** *7* **(D)** *10*

(E) *Es gibt keine vier solcher Zahlen.*

13. Auf einem Quadratgitter markieren wir 7×7 Gitterpunkte. Wie viele Gitterpunkte kann man aus diesen 49 Punkten so auswählen, dass es unter den gewählten Gitterpunkten keine drei gibt, die ein rechtwinkliges Dreieck bilden würden?



(A) *10* **(B)** *12* **(C)** *13* **(D)** *14* **(E)** *15*

Löst die folgende Aufgabe an der angegebenen Stelle des Antwortblattes!

14. In dem spitzwinkligen Dreieck ABC sind $\overline{AD}$ und $\overline{CE}$ Höhen. Wenn wir von A und C jeweils das Lot auf die Gerade DE fällen, dann entstehen die Fußpunkte M und N. Zu beweisen ist, dass $\left|\overline{ME}\right| = \left|\overline{DN}\right|$ gilt.

„Als Gehirnforscher wünsche ich allen Menschen, dass wir trotz stark wachsender Informationsflut die Fähigkeit bewahren, auf unsere innere Stimme zu hören. Nur so können wir durch Kreativität und durch den Geist der Zusammenarbeit unsere Wünsche verwirklichen und dem Gemeinwohl dienen."

Prof. Dr. Freund Tamás

BOLYAI MATHEMATIK TEAMWETTBEWERB®

2023

C. F. GAUSS

1. RUNDE

KLASSE 12
(DEUTSCHLAND)

SCHULSTUFE 12
(ÖSTERREICH)

J. BOLYAI

Förderer des Wettbewerbs:
Prof. Dr. Freund Tamás
Mitglied der Leopoldina, der Nationalen Akademie der Wissenschaften, Präsident der Ungarischen Akademie

Begründer des Wettbewerbs und Ersteller der Aufgaben:
Nagy-Baló András, *Mathematiklehrer*

Übersetzer der Aufgaben:
Zsuzsanna Werner, *Mathematiklehrerin*

Lektor der Übersetzung:
Thomas Wilhelm Schwarzer, *Mathematiklehrer*

Koordinatorin:
Zsuzsanna Werner, *Mathematiklehrerin*

Betreiber der Homepage und des Informatik-Systems:
Georg Probst, *Informatiker*
Róbert Csuka, *Elektroingenieur*

unesco

200. Jahrestag des Briefes von János Bolyai über die Entdeckung der nichteuklidischen Geometrie (1823)
Gefeiert in Zusammenarbeit mit der UNESCO

Bolyai Team® **Klasse 12 / Schulstufe 12** **17. Januar 2023**

Markiert die Lösungen der Aufgaben 1-13 auf dem Antwortblatt mit X. Bei den Aufgaben können auch mehrere richtige Antworten vorkommen.

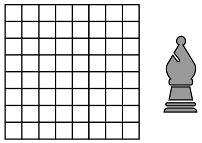
1. Peter befindet sich in einem Zimmer mit 7 Türen in einer Reihe nebeneinander. Nur eine Tür ist offen, Peter weiß nicht, welche. Ein Versuch läuft so ab: Peter probiert 3 Türen, falls eine offen ist, dann geht er hinaus. Ist keine Tür offen, dann wird sein Freund Karl von außen die soeben offene Tür schließen und eine benachbarte Tür neben dieser Tür öffnen. Peter kennt diese Strategie, bemerkt jedoch nicht, welche der Türen geöffnet bzw. geschlossen werden. Nach wie vielen Versuchen kann Peter sicher aus dem Zimmer herauskommen?

(A) *1* **(B)** *2* **(C)** *4* **(D)** *5* **(E)** *6*

2. Die Längen von zwei Seiten eines Dreiecks betragen 12 *cm* und 18 *cm*. Ein zweites Dreieck hat auch zwei Seiten mit genau diesen Längen. Die beiden Dreiecke sind ähnlich, aber nicht kongruent. Wie lang können die dritten Seiten dieser Dreiecke sein?

(A) *4 cm* **(B)** *8 cm* **(C)** *24 cm* **(D)** *27 cm* **(E)** *32 cm*

3. Wie viele Farben können wir von den unten angegebenen Anzahlen für die Felder des 8×8-Schachbretts benutzen, wenn Folgendes gelten muss: Wenn ein Läufer auf einem beliebigen Feld steht, dann kann er nach einem Schritt nicht erneut auf ein gleichfarbiges Feld treten. (Der Läufer kann sich nur diagonal bewegen und dabei beliebig viele Schritte tun. Ein Feld darf nur mit einer einzigen Farbe bemalt werden.)



(A) *8* **(B)** *9* **(C)** *10* **(D)** *11* **(E)** *12*

4. Folgende Punkte sind mit ihren Koordinaten gegeben: $A(-1|3)$; $B(1|3)$; $C(-3|1)$; $D(-1|1)$; $E(1|1)$; $F(3|1)$; $G(-1|-1)$; $H(1|-1)$. Bestimmt die höchste Anzahl gleichschenkliger Dreiecke, deren Eckpunkte alle zu den aufgezählten Punkten gehören!

(A) *20* **(B)** *22* **(C)** *24* **(D)** *26* **(E)** *28*

5. Ich habe eine vierstellige Zahl, die auf 9 endet, aufgeschrieben. Diese Zahl ist durch alle ihre Ziffern teilbar. Welche von den gegebenen Zahlen kann die erste Ziffer der notierten Zahl sein?

(A) *1* **(B)** *3* **(C)** *5* **(D)** *7* **(E)** *9*

6. Die Seitenflächen einer quadratischen Pyramide sind gleichseitige Dreiecke. (Gehen wir von der Kantenlänge eine Einheit aus!) Auf eine der Seitenflächen wird ein regelmäßiges Tetraeder mit der Kantenlänge 1 Einheit gelegt. Wie viele Seitenflächen hat der neue Körper?

(A) *5* **(B)** *6* **(C)** *7* **(D)** *8* **(E)** *9*

7. Vier Geschwister haben einige Toffifees bekommen. Sie haben ihre „Schätze" untereinander neu verteilt. Ole gab die Hälfte Peter. Peter war danach großzügig und gab ein Drittel seiner Stücke Ralf, dann gab Ralf von seinen Toffifees ein Viertel Lotti. Lotti rief begeistert: „Würde ich ein Fünftel meiner Toffis Ole geben, dann hätten wir alle die gleiche Anzahl!" Wie groß ist die kleinste Anzahl der Toffifees, die die Kinder untereinander aufgeteilt haben?

(A) *12* **(B)** *24* **(C)** *48* **(D)** *weniger als 50* **(E)** *mehr als 50*

8. Rosa, Ilka und Vreni sind sehr fleißige Schülerinnen. Sie haben beschlossen, alle Aufgaben der Aufgabensammlung im Team zu lösen. Rosa löst pro Tag a, Ilka b, Vreni c Aufgaben. (Mit einer Aufgabe beschäftigt sich immer nur ein Mädchen.) Wenn Rosa elfmal, Ilka siebenmal und Vreni neunmal so viele Aufgaben pro Tag schafften, dann könnten sie genau nach 5 Tagen fertig sein. Wenn sie etwas weniger arbeiten würden und dadurch würde Rosa nur viermal, Ilka zweimal und Vreni dreimal so viele Aufgaben pro Tag bearbeiten, dann könnten sie genau in 16 Tagen fertig sein. Wie viele Tage benötigen sie?

(A) *30* **(B)** *32* **(C)** *mehr als 32* **(D)** *mehr als 36* **(E)** *weniger als 40*

9. Wir betrachten regelmäßige Vielecke mit n Seiten und fahren wie folgt fort: In einer beliebigen Reihenfolge beschriften wir die Eckpunkte mit 1, 2, 3, …, n und die Seiten mit $n + 1$, $n + 2$, $n + 3$, …, $2n$. Die Beschriftung muss aber so sein, dass die Summe der Zahlen entlang jeder Seite gleich ist. (Es geht um die Summe von drei Zahlen, zwei wurden zu den Eckpunkten geschrieben, eine zur Seite.) Wie viele Seiten kann das Vieleck haben?

(A) *3* **(B)** *4* **(C)** *5* **(D)** *6* **(E)** *7*

10. Wir kennzeichnen voneinander unabhängig und willkürlich auf dem Umfang eines Kreises die verschiedenen Punkte A, B, C und D. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die beiden Sehnen $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ einander schneiden?

(A) $\frac{1}{4}$ **(B)** $\frac{1}{3}$ **(C)** $\frac{1}{2}$ **(D)** $\frac{2}{3}$ **(E)** $\frac{3}{4}$

Achtung! Aufgaben 11-14 folgen auf der nächsten Seite.